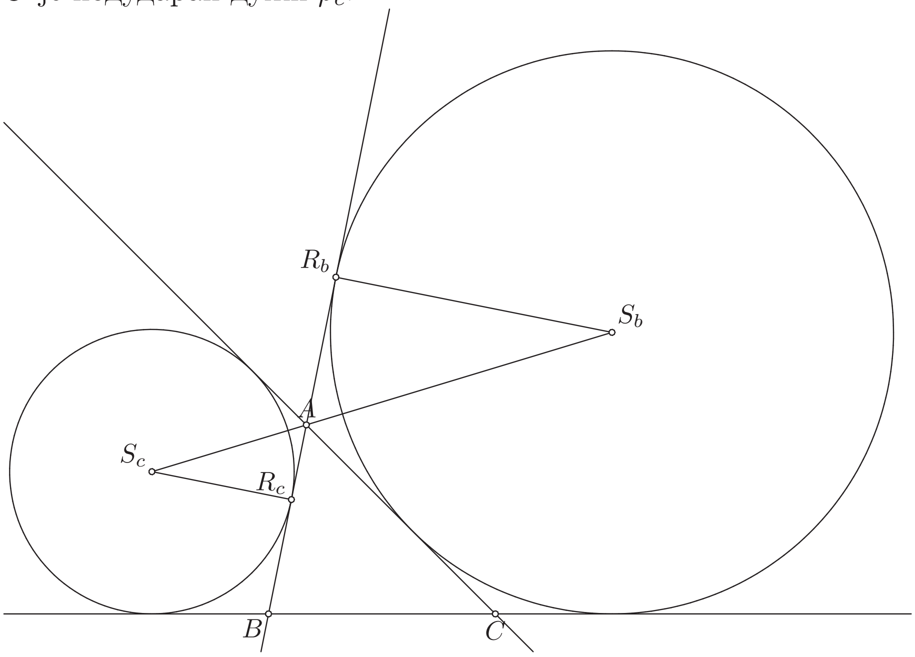
9) a, ρ_b, ρ_c

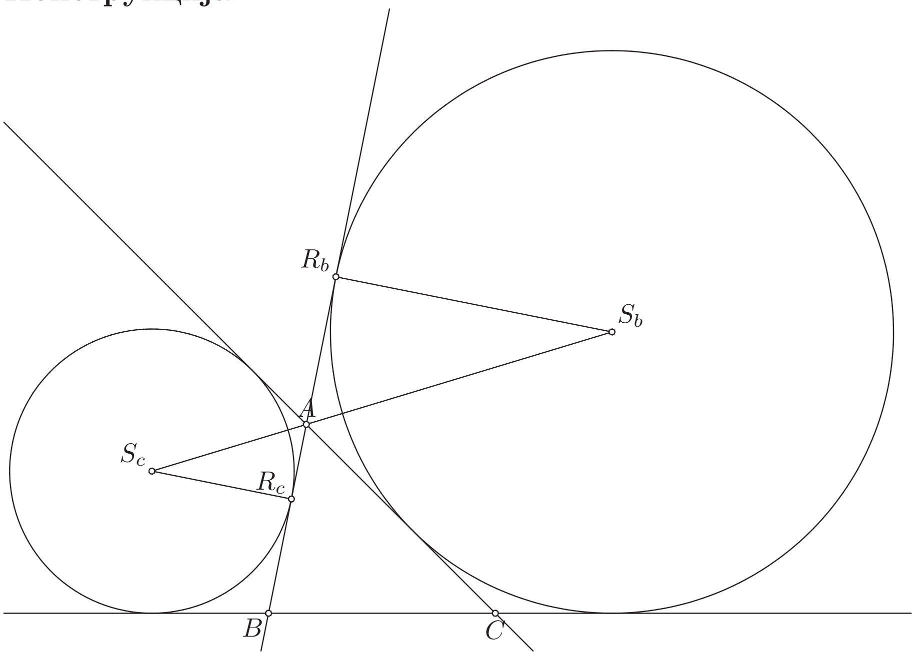
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $BC = a$, полупречник споља уписаног круга наспрам темена B је подударан дужи ρ_b и полупречник споља уписаног круга наспрам темена C је подударан дужи ρ_c.



Нека су S_b, S_c, R_b, R_c тачке из Великог задатка и нека су k_b, k_c редом споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$ наспрам темена B, C. Тада је на основу Великог задатка $R_bR_c = a$. За тачке S_b, S_c важи $S_bR_b = \rho_b$, $S_bR_b \perp R_bR_c$, $S_cR_c = \rho_c$, $S_cR_c \perp R_bR_c$ и $S_b, S_c \div R_bR_c$, па је R_bR_c заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c.

Права BC додирује кругове k_b, k_c, па је она њихова заједничка тангента. Како су $S_b, S_c \doteqdot BC$, у питању је њихова заједничка спољашња тангента. Према томе, тачка B је у пресеку заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c и праве R_bR_c, при чему важи распоред $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Takoђе, права AC је заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c, која није R_bR_c. Према томе, тачка C се налази у пресеку те тангенте и заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c која садржи тачку B, а тачка A се налази у пресеку те тангенте и праве R_bR_c.

Конструкција:

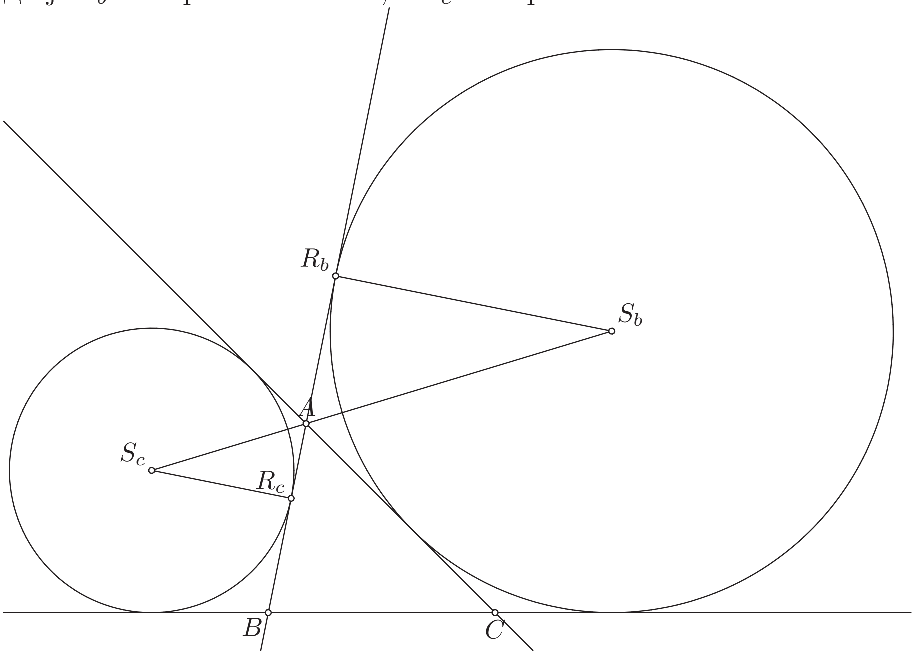


Конструишимо дуж $R_bR_c = a$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_c и означимо на њој са S_c тачку такву да је $S_cR_c = \rho_c$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_b и означимо на њој са S_b тачку такву да је $S_bR_b = \rho_b$ и $S_c, S_b \div R_bR_c$. Конструишимо кругове $k_b(S_b, \rho_b), k_c(S_c, \rho_c)$. Конструишимо заједничку спољашњу тангенту t кругова k_b, k_c која сече праву R_bR_c у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Конструишимо заједничку унутрашњу тангенту t_1 кругова k_b, k_c која није права R_bR_c. Означимо са A пресечну тачку правих R_bR_c, t_1 и са C пресечну тачку правих t, t_1.

Доказ: Треба доказати да је $BC = a$, да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена B подударан дужи ρ_b и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена C подударан дужи ρ_c.

ПК је $R_bR_c \perp S_bR_b$, $R_bR_c \perp S_cR_c$, $S_bR_b = \rho_b$ и $S_cR_c = \rho_c$. ПК су S_b, S_c центри кругова k_b, k_c и S_bR_b, S_cR_c њихови полупречници, па је R_bR_c заједничка тангента кругова k_b, k_c, а због $S_b, S_c \div R_bR_c$ је у питању заједничка унутрашња тангента. ПК се тачке A, B налазе на правој R_bR_c, па су праве AB и R_bR_c исте. Такође, ПК се тачке B, C налазе на правој t, која је заједничка спољашња тангента кругова k_b, k_c. ПК је права AC заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c различита од R_bR_c.

Дакле, праве AB, BC, AC јесу заједничке тангете кругова k_b, k_c, па следи да су то уписани или споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$. Пошто је BC заједничка спољашња тангента, следи да ниједан он њих није споља уписани круг наспрам темена A (ово важи зато што се од поменутих кругова с једне стране праве BC налазе три круга, а с друге стране један и то баш споља уписани напрам темена A). Такође, да је један од k_b, k_c уписани круг троугла $\triangle ABC$, онда би једна од правих AB, AC била заједничка спољашња тангента. Како то није случај, следи да су k_b, k_c споља уписани кругови наспрам темена B, C. Остаје још да се докаже да је k_b наспрам темена B, а k_c наспрам темена C.



Пошто ПК важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$, тачка R_c мора бити додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена C и странице AB, а тачка R_b додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена B и праве AB. Дакле, k_b јесте споља уписани круг наспрам темена B, а k_c јесте споља уписани круг наспрам темена C. ПК су полупречници кругова k_b, k_c подударни редом дужима ρ_b, ρ_c, па су полупречници споља уписаних кругова наспрам темена B, C троугла $\triangle ABC$ редом подударни датим дужима ρ_b, ρ_c.

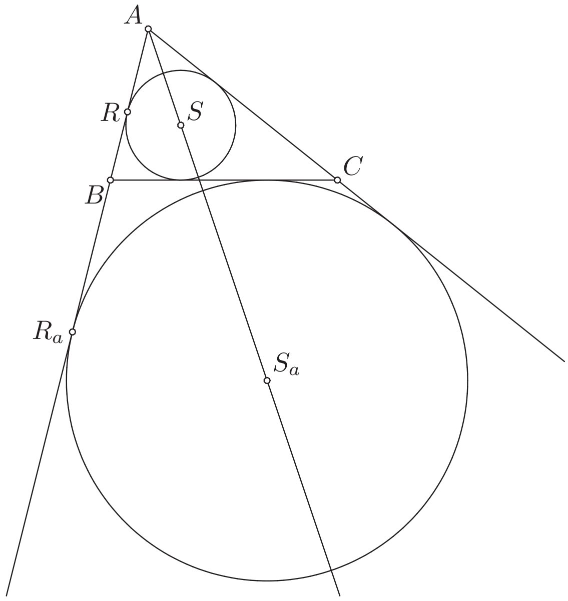
На основу Великог задатка следи да је $R_bR_c = BC$, а како је ПК $R_bR_c = a$, следи да је $BC = a$.

Дискусија: Кругове k_b, k_c је увек могуће конструисати и пошто имају заједничку унутрашњу тангенту R_bR_c која их не додирује у истој тачки, следи да имају и другу заједничку унутрашњу тангенту, као и две заједничке спољашње тангенте. Од њих тачно једна испуњава услов $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Дакле, конструкција троугла $\triangle ABC$ је увек могућа.

Према томе, за било које дужи a, ρ_b, ρ_c постоји јединствено решење до на подударност.

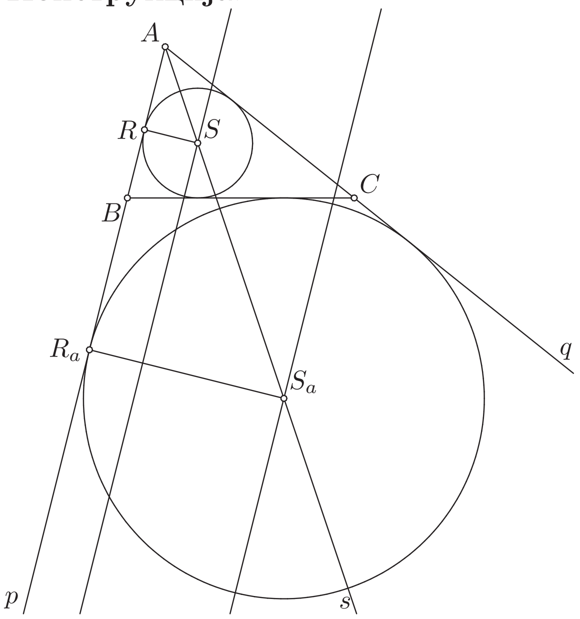
10) α, ρ, ρ_a

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle BAC = \alpha$, полупречник уписаног круга је подударан дужи ρ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су S, S_a редом центар уписаног круга k и центар споља уписаног круга k_a наспрам темена A и нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a на правој AB. Тачке S, S_a припадају бисектриси угла $\measuredangle BAC$ (полуправој!), а како су R, R_a редом додирне тачке кругова k, k_a и праве AB, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$. Према томе, тачка S се налази на растојању ρ од праве AB, а тачка S_a се налази на растојању ρ_a од праве AB. Права BC је заједничка тангента кругова k, k_a, а како важи $k, k_a \div BC$, у питању је заједничка унутрашња тангента тих кругова.

Конструкција:

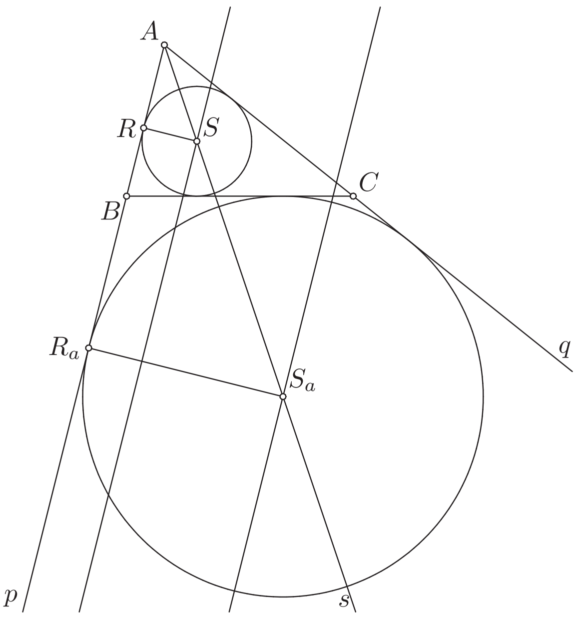


Конструишимо угао $\measuredangle pAq = \alpha$. Конструишимо бисектрису As (полуправу!) угла $\measuredangle pAq$. Конструишимо праву a која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве a и бисекрисе As означимо са S. Конструишимо праву b која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ_a од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве b и бисекрисе As означимо са S_a тако да важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$ и конструишимо њихову заједничку унутрашњу тангенту t. Пресечну тачку тангенте t и крака Ap угла $\measuredangle pAq$ означимо са B, а пресечну тачку тангенте t и крака Aq означимо са C.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

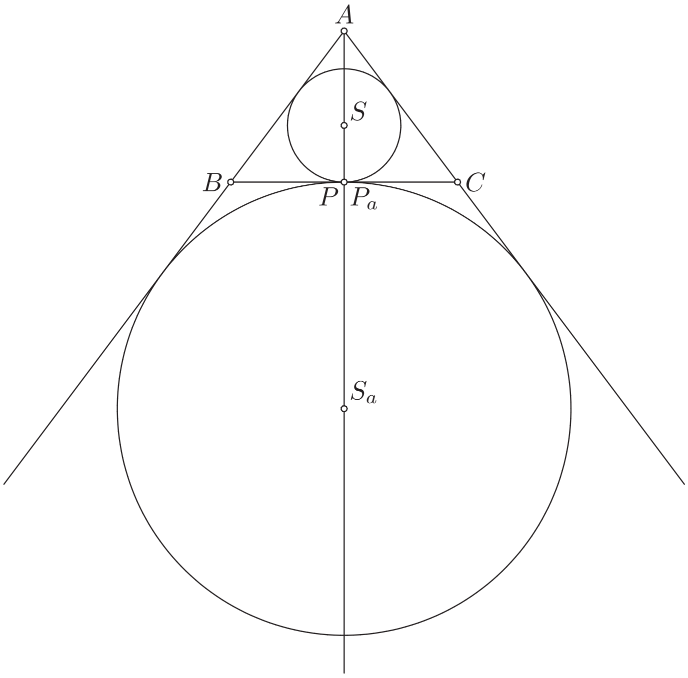
ПК тачка B припада краку Ap, а тачка C краку Aq угла $\measuredangle pAq$ који је ПК подударан углу α, па следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq = \alpha$.

Центри S, S_a кругова k, k_a су на бисектриси As угла $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq$ и налазе се редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, тј. крака AB, па како су им полупречници редом подударни дужима ρ, ρ_a, следи да они додирују краке Ap, Aq (тј. AB, AC) угла $\measuredangle pAq = \measuredangle BAC$. ПК је права BC заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па је један од тих кругова уписани, а други споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. С обзиром на то да ПК важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, следи да је $k(S, \rho)$ уписани, а $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг наспрам темена A. Коначно следи и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC подударан дужи ρ_a.

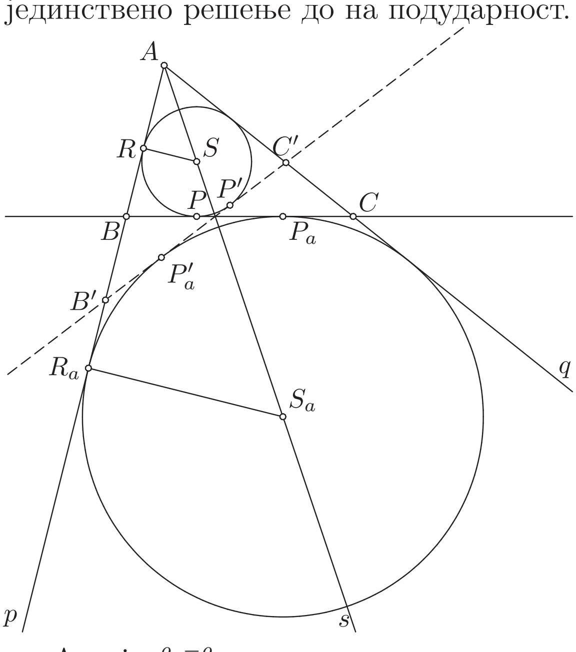


Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ чији је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a редом на краку Ap. Тада према Талесовој теореми следи $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SR}{S_aR_a}$, а како се тачке S, S_a налазе редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$, па је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Да би важио распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, мора важити $AS < AS_a$, тј. $\frac{AS}{AS_a} < 1$, а то важи ако и само ако важи $\frac{\rho}{\rho_a} < 1$, тј. $\rho < \rho_a$. Кругови k, k_a имају заједничких унутрашњих тангенти ако и само ако важи $SS_a \geq \rho + \rho_a$. Из правоуглих троуглова $\triangle ASR$ и $\triangle AS_aR_a$ добијамо да је $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle RAS = \frac{RS}{AS}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle R_aAS_a = \frac{R_aS_a}{AS_a}$, па важи $AS = \frac{RS}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $AS_a = \frac{R_aS_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Према томе, важи $SS_a = AS_a - AS = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, па је $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geq \rho + \rho_a$ услов постојања заједничких унутрашњих тангенти.



Ако важи $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$, онда се кругови k, k_a додирују и постоји јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па постоји јединствено решење до на подударност.

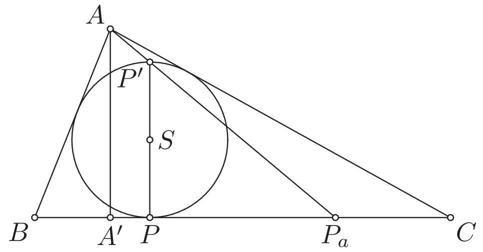


Ако је $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда се кругови k, k_a не додурују и имају две разне заједничке тангенте, па постоје два неподударна решења.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$, онда постоји јединствено решење до на подударност. Ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда постоје два неподударна решења. У осталим случајевима, задатак нема решења.

11) $b - c, h_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A' подножје висине из темена A, S центар уписаног круга и P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Тада важи $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, $AA' = h_a$ и $SP = \rho$.

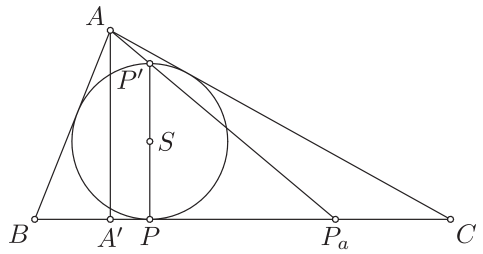


Нека су P', P_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, $PP_a = b - c$ и тачке A, P', P_a су колинеарне. Тачка S је средиште дужи $P'P$, па је $P'P = P'S + SP = 2SP = 2\rho$. У троуглу $\triangle P'PP_a$ је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка A припада правој $P'P_a$, налази се на растојању h_a од праве BC, тј. од праве PP_a и важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачке B, C припадају правој PP_a и тангентама уписаног круга $k(S, SP)$ из тачке A, тако да важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle P'PP_a$ такав да је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b-c$. Означимо са S средиште дужи $P'P$ и конструишимо круг $k(S, SP)$. Конструишимо праву p која је паралелна са правом PP_a и налази се на растојању h_a од ње, такву да важи $p, S, P' \doteqdot PP_a$. У пресеку правих p и $P'P_a$ означимо тачку A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга k из тачке A. У пресеку тих тангенти и праве PP_a означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, да је висина из темена A подударна дужи h_a и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ.

Тачка S је средиште дужи $P'P$ која је ПК подударна дужи 2ρ, па следи да је $SP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}2\rho = \rho$. Како је по конструкцији $P'P \perp PP_a$, следи да је права PP_a нормална на полупречнику SP круга $k(S, SP)$, па је она тангента круга k у тачки P. ПК важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, па праву PP_a можемо означавати и са BC. Дакле, права BC је тангента круга k и додирује је у тачки P која ПК припада дужи BC. Такође, праве AB, AC су ПК тангенте круга k, па следи да је круг k или уписани круг или споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Како ПК важи $A, S \underset{\cdot\cdot}{-} PP_a$, тј. $A, S \underset{\cdot\cdot}{-} BC$, следи да је у питању уписани круг, па је његов полупречник подударан дужи ρ.



Дакле, P је додирна тачка уписаног круга и странице BC, а како је ПК тачка S средиште дужи $P'P$, следи да је тачка P' дијаметрално супротна тачки P. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, тачка P' и додирна тачка странице BC и споља уписаног круга троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP' и странице BC тачка P_a, следи да је тачка P_a додирна тачка странице BC и споља уписаног круга наспрам темена A. Ако је s полуобим троугла $\triangle ABC$, на основу Великог задатка следи да је $BP = s - AC$ и $BP_a = s - AB$, па због распореда $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ следи да је $BP < BP_a$, односно $s - AC < s - AB$, па је $AB < AC$. На основу Великог задатке је онда $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Тачка A припада правој p која је паралелна са правом PP_a, тј. правом BC и налази се на растојању h_a од ње, па ако означимо са A' подножје висине из темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је $AA' = h_a$.

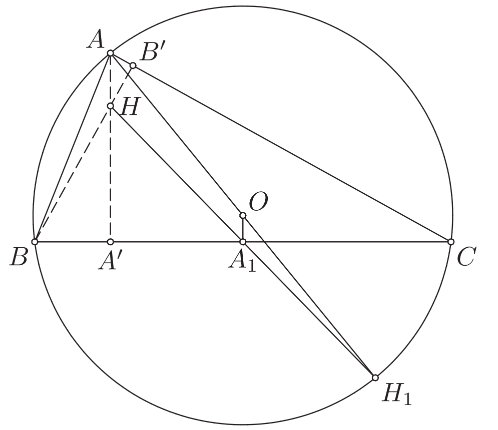
Дискусија: Да би важио услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, мора бити $h_a > 2\rho$, јер праве које су паралелне са PP_a и налазе се на растојању мањем од 2ρ секу дуж P_aP', а права која се налази на растојању 2ρ сече праву P_aP' у тачки P'. Ако важи тај услов, важи и да тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, јер права p (која је паралелна са PP_a и налази се на растојању $h_a(> 2\rho)$ од ње) нема заједничких тачака са кругом k, па постоје две тангенте круга k из тачке A. Такође, ако важи услов $\mathcal{B}(A, P, P_a')$, те тангенте секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака, па услов $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.

Дакле, ако важи $h_a > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност, а ако важи $h_a \leq 2\rho$, задатак нема решења.

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A, ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

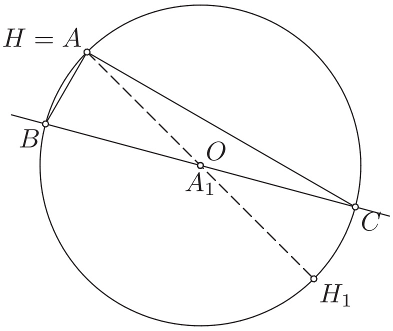
Решење:

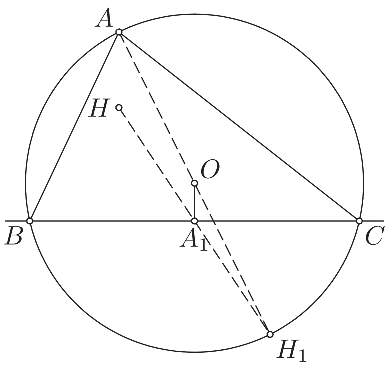
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека се његово теме A поклапа с датом тачком A, нека се његов ортоцентар поклапа с датом тачком H и нека се центар његовог описаног круга поклапа са тачком O.



Нека је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$ и нека је H_1 тачка симетрична ортоцентру H у односу на тачку A_1. У 3. задатку из области Подударност смо доказали да је тада тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар O описаног круга троугла $\triangle ABC$. Приметимо да ако се тачке A, H поклапају, тј. ако је $\triangle ABC$ правоугли с правим углом код темена A, онда се поклапају и тачке O, A_1 јер се центар описаног круга налази на средишту хипотенузе BC, а ако се тачке A, H разликују, онда се разликују и тачке O, A_1 и имамо да је права BC нормална на правој OA_1 у тачки A_1.

Конструкција:





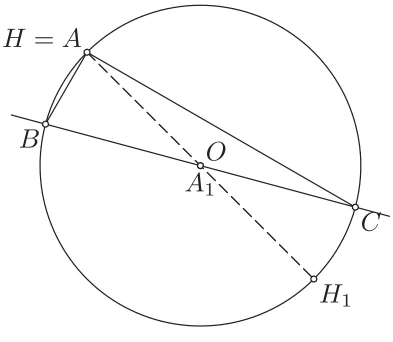
Означимо са H_1 тачку симетричну тачки A у односу на тачку O, а затим са A_1 средиште дужи HH_1. Конструишимо круг $l(O, OA)$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда конструишимо произвољну праву p која садржи O и различита је од праве OA и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l, а ако се тачке O, A_1 разликују, онда конструишимо праву p која је нормална на OA_1 у тачки A_1 и не садржи тачку A и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l.

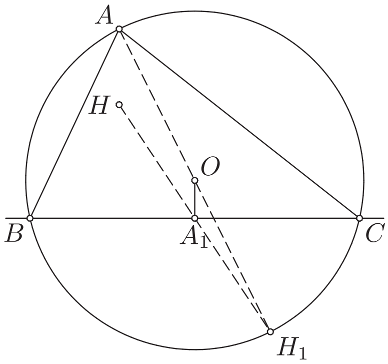
Доказ: Треба доказати да је тачка A једно теме троугла $\triangle ABC$, да је тачка H ортоцентар тог троугла и да је тачка O центар његовог описаног круга. Очигледно је испуњено да је тачка A теме троугла $\triangle ABC$.

ПК се тачке B, C разликују и припадају правој p која не садржи тачку A, па су A, B, C три неколинеарне тачке. Такође, оне ПК припадају кругу l, па је l описани круг троугла $\triangle ABC$, а како је O његов центар, следи да је O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.

Из претходног закључка следи да је $OB = OC$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда тачка O припада страници BC, па због $OB = OC$ закључујемо да је O (тј. A_1) средиште странице BC. Ако се тачке O, A_1 разликују, онда је по конструкцији $OA_1 \perp BC$, па како O припада симетрали странице BC (јер важи $OB = OC$), следи да је OA_1 симетрала странице BC. ПК тачка A_1 припада страници BC, па следи да је она њено средиште. ПК је тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар описаног круга, а у 3. задатку из области Подударност доказали смо да је тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице BC симетрична и темену A у односу на центар описаног круга троугла $\triangle ABC$. Следи да је тачка H_1 симетрична ортоцентру у односу на средиште A_1 дужи BC, а самим тим и да је ортоцентар симетричан тачки H_1 у односу на тачку A_1. ПК је A_1 средиште дужи HH_1, па следи да је тачка H симетрична тачки H_1 у односу на средиште A_1 странице BC, што значи да је тачка H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

Дискусија: Ако се тачке A, O поклапају, задатак нема решења, јер се темена сваког троугла разликују од центра његовог описаног круга (а тада такође не постоји круг $l(O, OA)$). Нека су тачке A, O различите. Морамо обезбедити да права p коју конструишемо кроз тачку A_1 сече круг l у двема тачкама и да не садржи тачку A. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда смо ту праву конструисали произвољно тако да се разликује од праве OA. Свака права која пролази кроз тачку O сече круг l у двема тачкама и само права OA садржи тачку A. Дакле, тада постоји бесконачно много решења.





Нека се тачке O, A_1 разликују. Тачка O је средиште дужи AH_1, а тачка A_1 је средиште дужи HH_1. Ако су тачке A, H, H_1 неколинеарне (тј. ако постоји троугао $\triangle AHH_1$), онда је OA_1 његова средња линија и важи $OA_1 \parallel AH$ и $OA_1 = \frac{AH}{2}$. Ако су тачке A, H, H_1 колинеарне, онда је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH_1}$ и $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{A_1H_1}$ (јер су O, A_1 редом средишта дужи AH_1, HH_1), па следи да је $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Следи да је $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \|2\overrightarrow{OA_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\| = 2OA_1$.

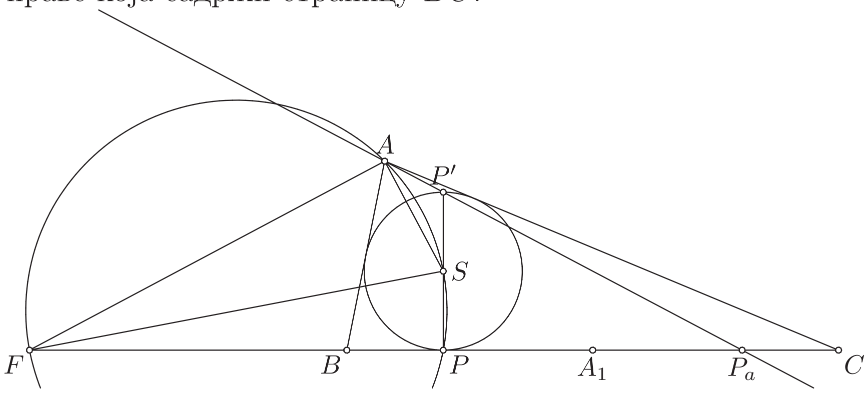
Да би права p која садржи A_1 и нормална је на OA_1 секла круг $l(O, OA)$ у двема тачкама, тачка A_1 мора припадати унутрашњости круга l, тј. мора бити $OA_1 < OA$. Дакле, добијамо услов $\frac{1}{2}AH < OA$, тј. $AH < 2OA$. У случају да права p садржи тачку A, нема решења, а у осталим случајевима постоје два решења, јер имамо избор коју ћемо од пресечних тачака праве p и круга l обележити са B, а коју са C. Ако су тачке A, H, O колинеарне, онда је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с врхом A, па заменом ознака теменима B, C добијамо подударна решења, а ако тачке A, H, O нису колинеарне, онда заменом ознака теменима B, C не добијамо подударна решења.

Дакле, ако се тачке O, A разликују, а тачке A, H поклапају, постоји бесконачно много решења. Ако се тачке O, A разликују, као и тачке A, H, ако су A, H, O колинеарне и важи $AH < 2OA$, постоје два међусобно подударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне, угао $\measuredangle HAO$ није туп и важи $AH < 2OA$, онда постоје два неподударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне и права p не садржи тачку A, постоје два неподударна решења. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

3. Дате су тачке A_1, S, F. Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC, S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC.

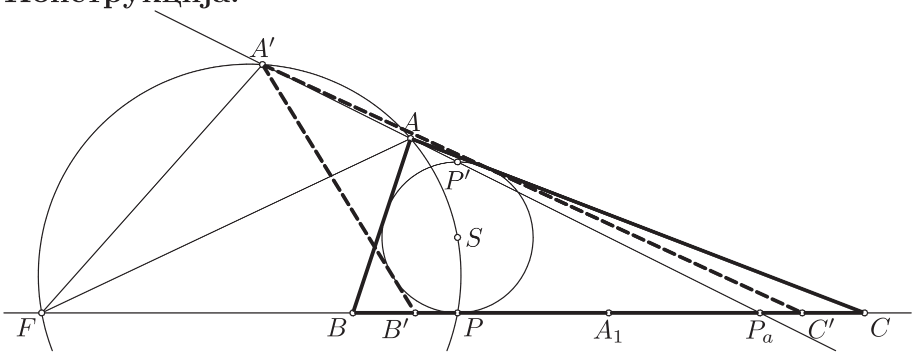
Решење:

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека је тачка A_1 средиште странице BC, тачка S центар његовог уписаног круга и F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве која садржи страницу BC.



Нека су P, P', P_a тачке из Великог задатка. Тачка P је подножје нормале из тачке S на страници BC, а самим тим и на правој FA_1. На основу Великог задатка је тачка P_a симетрична тачки P у односу на тачку A_1, а тачка P' јој је симетрична у односу на тачку S. Полуправа AS је бисектриса унутрашњег, а полуправа AF бисектриса спољашњег угла код темена A, што значи да је угао $\measuredangle FAS$ прав. Према томе, тачка A припада кругу над пречником FS. Такође, на основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, па тачка A припада правој P_aP'. Следи да она припада пресеку круга над пречником FS и праве P_aP'. Праве AB и AC су тангенте уписаног круга $k(S, SP)$ и тачке B, C припадају правој FA_1.

Конструкција:



Конструишимо праву FA_1. Означимо подножје нормале из тачке S на правој FA_1 са P, а затим тачке симетричне тачки P редом у односу на тачке A_1, S означимо са P_a, P'. Конструишимо круг над пречником FS и његов пресек с правом P_aP' означимо са A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга $k(S, SP)$ из тачке A и њихове пресеке с правом FA_1 означимо са B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$.

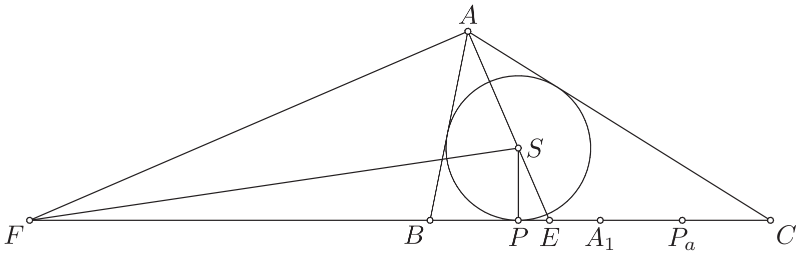
Доказ: Треба доказати да је тачка A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, да је тачка S центар његовог уписаног круга и да је F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве BC.

ПК је полупречник SP круга $k(S, SP)$ нормалан на правој FA_1, тј. на правој BC, па следи да је права BC тангента круга k. Такође, праве AB и AC су ПК тангенте круга k, а како ПК важи $\mathcal{B}(B, P, C)$, следи да је k уписани круг или спојља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Пошто ПК важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, следи $A, P' \doteqdot BC$, а пошто је S средиште PP', следи $\mathcal{B}(P, S, P')$, па је $P', S \doteqdot BC$. Следи $A, S \doteqdot BC$, па је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, што значи да је његов центар S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$.

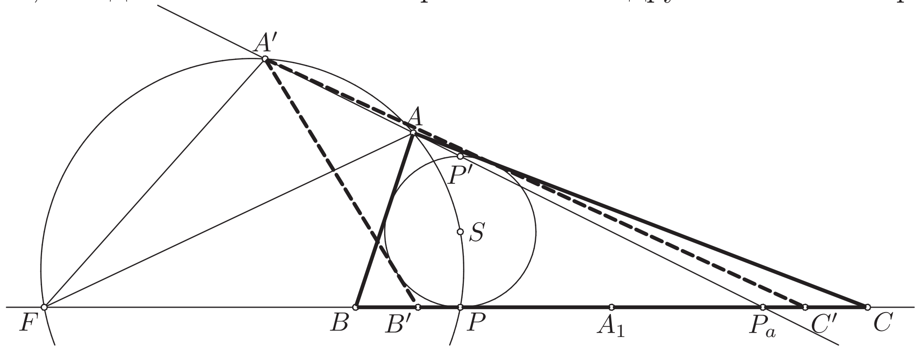
Из чињеница да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC, ПК тачка P' симетрична тачки P у односу центар уписаног круга S, $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ и да P_a припада правој BC, на основу Великог задатка следи да је тачка P_a додирна тачка спојља уписаног круга наспрам темена A и странице BC. Како је на основу Великог задатка средиште дужи BC уједно и средиште дужи PP_a, а ПК је A_1 средиште дужи PP_a, следи да је тачка A_1 средиште дужи BC.

Пошто је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да је полуправа AS бисектриса унутрашњег угла код темена A. ПК тачка A припада кругу над пречником FS, па је угао $\measuredangle FAS$ прав. Дакле, полуправа AF је бисектриса спољашњег угла, па како тачка F припада правој BC, следи да је она пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и праве која садржи страницу BC.

Дискусија: Центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ припада његовој унутрашњости, па следи да не припада правој BC, а самим тим ни правој FA_1. Дакле, тачке F, A_1, S морају бити неколинеарне, иначе задатак нема решења.



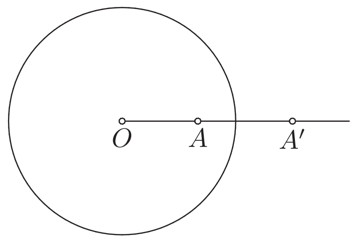
Нека је E пресечна тачка бисектрисе унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и странице BC. Без обзира на то да ли важи $\mathcal{B}(F, B, C)$ или $\mathcal{B}(F, C, B)$, важи $\mathcal{B}(F, P, E, A_1, P_a)$. Троугао $\triangle FAS$ је правоугли с правим углом код темена A, па је угао $\measuredangle FSA$ оштар. Због $\mathcal{B}(A, S, E)$ следи да је угао $\measuredangle FSE$ туп. Из $\mathcal{B}(F, E, A_1)$ следи да је $\measuredangle FSA_1 > \measuredangle FSE$, па је и угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Дакле, да би постојало решење, тачке F, A_1, S морају бити такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Такође, тачке F, S, A_1 морају бити такве да круг над пречником FS и полуправа P_aP' имају заједничких тачака. У том случају се било која од пресечних тачака полуправе P_aP' и круга над пречником FS може означити са A и биће испуњен услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, што значи да постоје две тангенте круга k из тачке A и оне секу праву FA_1 са разних страна тачке P. Било која од тих тачака се може означити са B, а онда се са C означава пресечна тачка друге тангенте и праве FA_1.



Према томе, ако су тачке F, A_1, S неколинеарне такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп и круг над пречником FS сече полуправу P_aP' у двема тачкама, задатак има четири неподударна решења, а ако се тај круг и полуправа P_aP' додирују, задатак има два неподударна решења. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

4 Инверзија

Дефиниција 23. Нека је $k(O, r)$ круг неке равни α. *Инверзија* у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \longrightarrow \alpha \setminus \{O\}$ које тачку A слика у тачку A' полуправе OA такву да важи $OA \cdot OA' = r^2$.



Важно је нагласити да тачка O не припада ни домену ни кодомену пресликавања ψ_k.

Особине овог пресликавања су:

- ψ_k је инволуција, односно $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$;

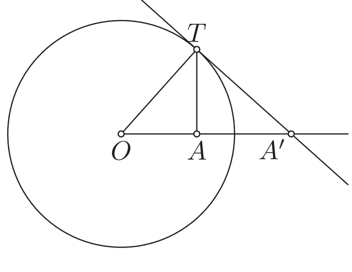
  Инверзија је очигледно инволуција, тј. $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$, јер ако је A' слика тачке A, онда A' припада полуправој OA и важи $OA \cdot OA' = r^2$, па следи да тачка A припада полуправој OA' и важи $OA' \cdot OA = r^2$, што по дефиницији значи да је $\psi_k(A') = A$. Према томе, инверзија је бијекција и инволуција.

- тачка A се слика у себе ако и само ако припада кругу k;

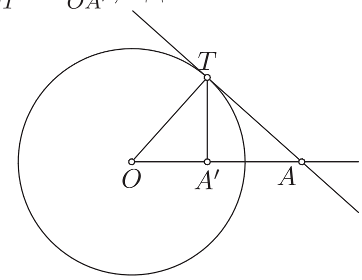
  Ако тачка A припада кругу k, онда је $OA \cdot OA = r^2$, па како A припада полуправој OA, следи да је $\psi_k(A) = A$. Обрнуто, ако је $\psi_k(A) = A$, онда је $OA \cdot OA = r^2$, тј. $OA = r$, па A припада кругу k.

- тачке из унутрашњости круга k, различите од тачке O, сликају се у тачке из спољашњости круга k и обрнуто;

  Помоћна конструкција слике тачке при инверзији:



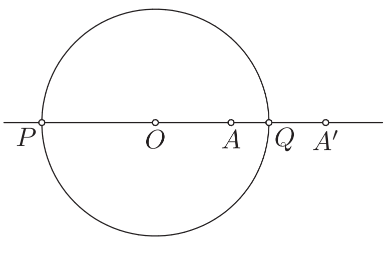
Нека је A тачка у унутрашњости круга k различита од тачке O. Конструишимо полуправу OA и нормалу n на тој полуправој у тачки A. Једну од пресечних тачака нормале n и круга k означимо са T и конструишимо тангенту круга k у тачки T (нормалу на OT у тачки T) и са A' означимо њен пресек с полуправом OA. Троуглови $\triangle OTA$ и $\triangle OA'T$ су слични јер је $\measuredangle TOA = \measuredangle A'OT$ и $\measuredangle OAT = \frac{\pi}{2} = \measuredangle OTA'$, па је $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$, односно $OA \cdot OA' = OT \cdot OT = r^2$. Према томе, $\psi_k(A) = A'$.



Ако је A тачка у спољашњости круга k, онда конструишимо произвољну тангенту круга k из те тачке, означимо додирну тачку са T и конструишимо нормалу n на полуправој OA која садржи тачку T и означимо подножје те нормале са A'. На исти начин као малопре се добија да је $\psi_k(A) = A'$.

Према томе, овим смо доказали да се тачке из унутрашњости круга k, различите од O, сликају у његову спољашњост и обрнуто. Такође, тачке круга k се сликају у себе и све тачке које се сликају у себе припадају кругу k.

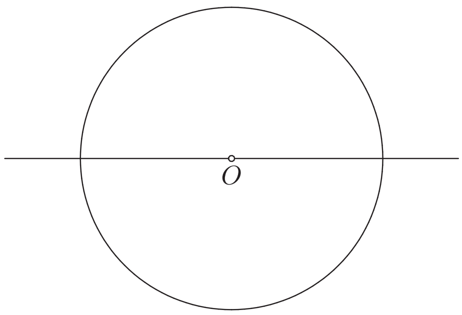
- ако је $\psi_k(A) = A'$ и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$;

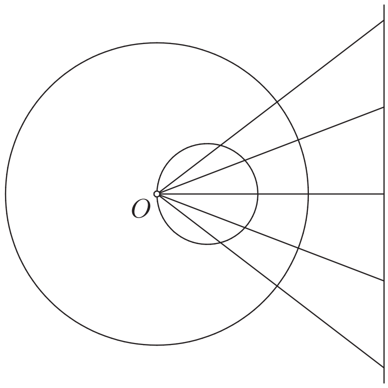


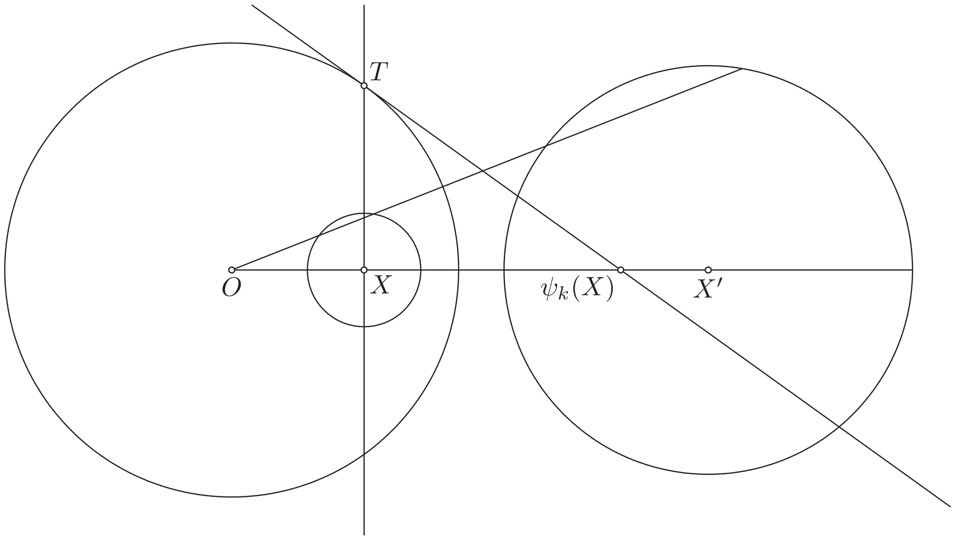
Нека је A произвољна тачка различита од O, $A' = \psi_k(A)$ и нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ, а пошто A' припада полуправој OA, следи да није $\mathcal{B}(A, O, A')$, па по дефиницији 17 следи да је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$. На основу задатка 2.11 следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.

- ако права p садржи тачку O, онда се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$;
- ако права p не садржи тачку O, онда се p слика у $l \setminus \{O\}$, где је l круг који садржи O;
- ако круг l садржи тачку O, онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O;
- ако круг l не садржи тачку O, онда се l слика у круг l_1 који такође не садржи O, при чему се центар круга l **не слика** у центар круга l_1;

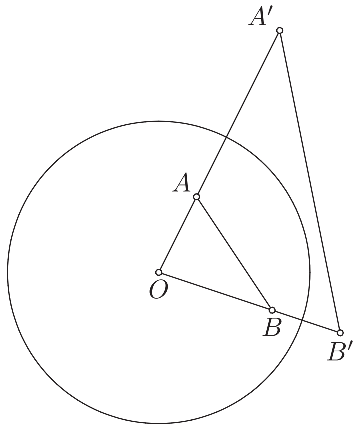
  На следећим сликама видимо како се инверзијом сликавају праве и кругови у зависности од тога да ли садрже тачку O. Такође, видимо да ако је $\psi_k(l) = l_1$, онда се центар круга l не слика у центар круга l_1.







- ако је $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$, онда је $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$;



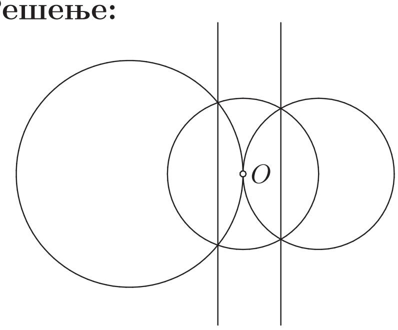
  Нека су A, B две разне тачке и $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$. Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ су слични јер имају заједнички угао код темена O и из $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следи да је $OA : OB' = OB : OA'$. Према томе, $OA : OB' = AB : B'A'$, тј. $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

- ψ_k чува углове између кривих.

  Угао између двеју кривих које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки, при чему је права сама себи тангента у произвољној тачки. Пошто инверзија чува углове, угао између тангенти двеју кривих у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти слика тих кривих при инверзији ψ_k у њиховој пресечној тачки. Пошто се инверзијом праве и кругови сликају у праве и кругове, инверзија чува углове између правих и кругова. Пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

Решење:



Нека је $k(O,r)$ круг инверзије (дакле, O је центар инверзије) и нека су k_1, k_2 кругови такви да је $k_1 \cap k_2 = \{O\}$. Пошто садржи центар инверзије, кад кажемо да се круг k_1 слика у праву k_1' која не садржи центар инверзије, морамо имати у виду да слика тачке O није дефинисана, па се формално скуп $k_1 \setminus \{O\}$ слика у праву k_1', тј. важи $\psi_k(k_1 \setminus \{O\}) = k_1'$. Слично и за круг k_2 важи $\psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = k_2'$, где је k_2' права која не садржи центар инверзије. Према томе, како је ψ_k бијекција, важи

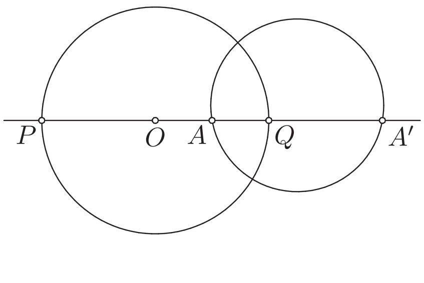
$$\begin{aligned} k_1' \cap k_2' &= \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k((k_1 \setminus \{O\}) \cap (k_2 \setminus \{O\})) \\ &= \psi_k((k_1 \cap k_2) \setminus \{O\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Дакле, праве k_1' и k_2' немају заједничких тачака, па су паралелне, што је и требало доказати.

2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A'. Доказати да је $l \perp k$.

У решењу овог задатка користићемо 11. и 14. задатак из области Сличност. Подсетимо се њихових поставки.
11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.
14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff k \perp l$.

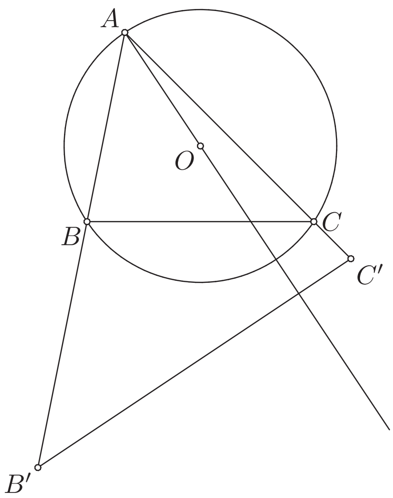
Решење:



Нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ и важи $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r^2 = PO^2$, па на основу 11. задатка из области Сличност важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$. Дуж PQ је пречник круга k, круг l садржи тачке A, A' и важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$, па на основу 14. задатка из области Сличност следи да је $k \perp l$, што је и требало доказати.

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC. Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

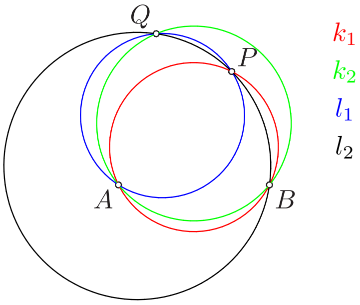
Решење:



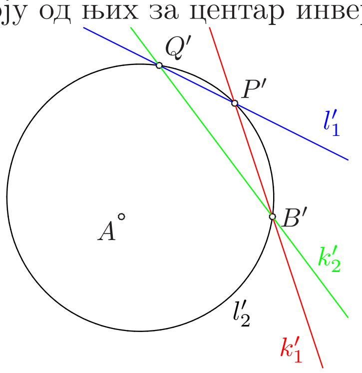
Нека је $k(A, \rho)$ круг с центром у тачки A чији је полупречник ρ једнак $\sqrt{AB \cdot AB'}$. Тада је $B' = \psi_k(B)$ и $C' = \psi_k(C)$. Описани круг l садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у праву $B'C'$ (тачније, $\psi_k(l \setminus \{A\}) = B'C'$). Такође, права AO садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у себе (тачније, $\psi_k(AO \setminus \{A\}) = AO \setminus \{A\}$). Права AO и круг l су међусобно нормални, јер права AO садржи центар O круга l. Пошто инверзија чува углове, следи да су слике праве AO и круга l међусобно нормални, тј. да је $AO \perp B'C'$, што је и требало доказати.

4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB.

Решење:



Означимо кругове описане око троуглова $\triangle ABP, \triangle ABQ$ редом са k_1, k_2, а кругове описане око троуглова $\triangle PQA, \triangle PQB$ редом са l_1, l_2. Много је лакше наћи угао између правих него између кругова. Инверзија чува углове и одређене кругове слика у праве, па је пожељно применити неку инверзију и пресликати што већи број кругова у праве. Центар инверзије одаберимо тако да припада највећем броју кругова. Пошто све четири тачке A, B, P, Q припадају по трима круговима, одаберимо било коју од њих за центар инверзије, нпр. тачку A.

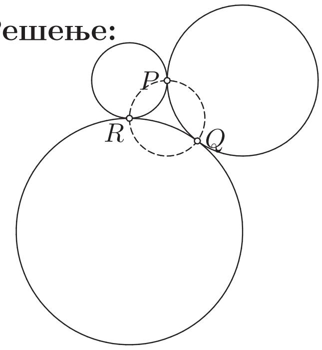


Дакле, нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', P', Q' дате са $B' = \psi_k(B), P' = \psi_k(P), Q' = \psi_k(Q)$, праве k_1', k_2', l_1' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l_1' = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$ и нека је круг l_2' дат са $l_2' = \psi_k(l_2)$. Знамо да l_2 круг не садржи тачку A (ако би је садржао онда би четвороугао $ABPQ$ био тетиван што је у супротности да претпоставком задатка да је $ABPQ$ нететиван четвороугао), те се он слика у круг l_2' који не садржи тачку A. Круг k_1 садржи тачке B, P, па је $k_1' = B'P'$. Слично, $k_2' = B'Q'$ и $l_1' = P'Q'$, а како круг l_2 садржи тачке B, P, Q, следи да круг l_2' садржи тачке B', P', Q'. Угао између праве l_1' и круга l_2' једнак је оштром углу између тетиве $P'Q'$ и тангенте круга

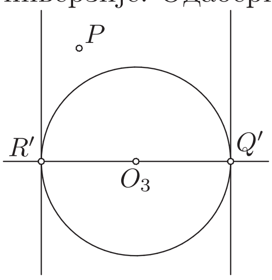
l_2' у некој од тачака P', Q' (подударни су), а тај угао је подударан периферијском углу над тетивом $P'Q'$, тј. углу $\measuredangle P'B'Q'$, што је угао између правих k_1', k_2'. Инверзија чува углове, па следи да је угао између кругова l_1, l_2 подударан углу између кругова k_1, k_2, што је и требало доказати.

5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R. Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

Решење:



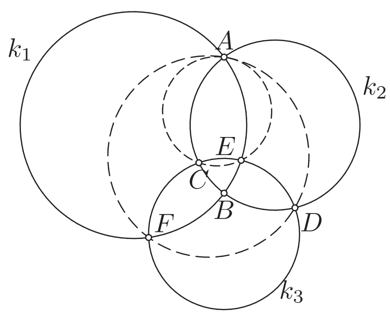
Нека је $k_1 \cap k_2 = \{P\}, k_2 \cap k_3 = \{Q\}, k_3 \cap k_1 = \{R\}$. Означимо круг описан око троугла $\triangle PQR$ са l. Кроз сваку од тачака P, Q, R пролазе по три од четири дата круга, па је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.



Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R)$, нека су праве k_1', k_2', l' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\}), l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$ и нека је круг k_3' дат са $k_3' = \psi_k(k_3)$. Кругови k_1, k_2 се додирују у центру инверзије P, па на основу 1. задатка следи да је $k_1' \parallel k_2'$, а такође кругови k_1, k_2 додирују круг k_3 редом у тачкама R, Q, па су k_1', k_2' тангенте круга k_3' редом у тачкама R', Q'. Према томе, ако је O_3 центар круга k_3', онда је $O_3R' \perp k_1'$ и $O_3Q' \perp k_2'$. Због $k_1' \parallel k_2'$, следи да је $O_3R' \parallel O_3Q'$, па следи да су тачке O_3, Q', R' колинеарне. Круг l садржи тачке P, Q, R, па је права $Q'R'$ слика круга l, односно права l'. Дакле, права l' је нормална на k_1', k_2' и садржи центар круга k_3', па је нормална и на k_3'. Инверзија чува углове, па следи да је $l \perp k_1, k_2, k_3$, што је и требало доказати.

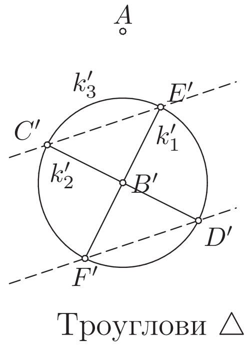
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B, k_2 и k_3 у тачкама C и D, k_3 и k_1 у тачкама E и F. Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A.

Решење:



Нека су l_1, l_2 кругови описани око троуглова $\triangle ACE, \triangle ADF$. Тачка A припада свим круговима осим кругу k_3, па одаберимо њу за центар инверзије.

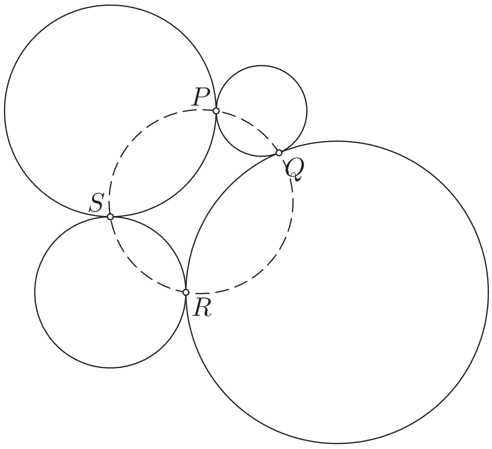
Нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', C', D', E', F' дате са $B' = \psi_k(B)$, $C' = \psi_k(C)$, $D' = \psi_k(D)$, $E' = \psi_k(E)$, $F' = \psi_k(F)$, нека су праве k_1', k_2', l_1', l_2' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{A\})$, $k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{A\})$, $l_1' = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$, $l_2 = \psi_k(l_2 \setminus \{A\})$ и нека је круг k_3' дат са $k_3' = \psi_k(k_3)$. Инверзија чува углове, па следи да су праве k_1', k_2' међусобно управне у тачки B' и управне на кругу k_3', тј. садрже његов центар. Према томе, тачка B' је центар круга k_3'. Кругови k_1, k_3 имају заједничке тачке E, F, па следи да се права k_1' и круг k_3' секу у тачкама E', F'. Слично, права k_2' и круг k_3' се секу у тачкама C', D'. Круг l_1 садржи тачке A, C, E, а круг l_2 тачке A, D, F, па је $l_1' = C'E'$ и $l_2' = D'F'$.

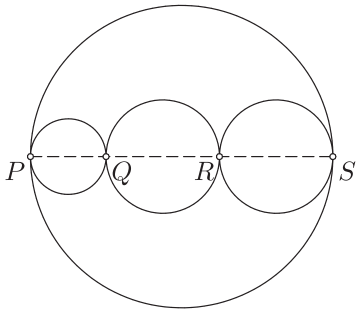


Троуглови $\triangle B'C'E'$ и $\triangle B'D'F'$ су једнакокрако правоугли, па следи да су углови $\measuredangle B'C'E'$ и $\measuredangle B'D'F'$ једнаки по $45°$, па су и међусобно подударни. Према томе, следи да су праве $C'E'$ и $D'F'$ паралелне, тј. $l_1' \parallel l_2'$. Како кругови l_1 и l_2 имају заједничку тачку A, следи да им је то једина заједничка тачка, тј. да се додирују у тачки A.

7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

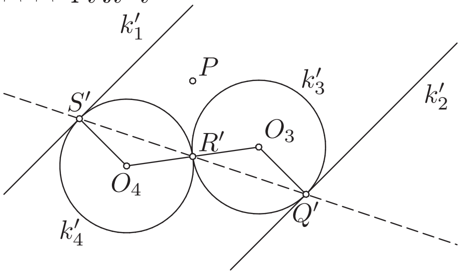
Решење:



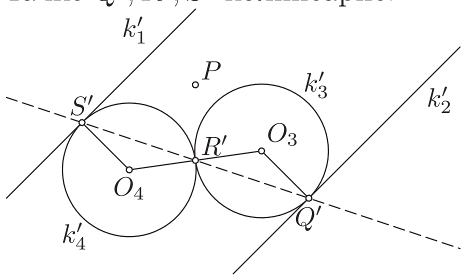


Нека се кругови k_1, k_2 додирују у тачки P, нека се кругови k_2, k_3 додирују у тачки Q, нека се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R и нека се кругови k_4, k_1 додирују у тачки S. Треба доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Свака од тачака P, Q, R, S заједничка је за по два круга, тако да је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.

Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R', S' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R), S' = \psi_k(S)$, праве k_1', k_2' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$ и кругови k_3', k_4' дати са $k_3' = \psi_k(k_3), k_4' = \psi_k(k_4)$. На основу 1. задатка следи да су праве k_1', k_2' паралелне, а пошто се k_2, k_3 додирују у тачки Q и k_1, k_4 додирују у тачки S, следи да су праве k_1', k_2' редом тангенте кругова k_4, k_3 у тачкама S', Q'. Пошто се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R, следи да се кругови k_3', k_4' додирују у тачки R'.



Означимо са O_3, O_4 редом центре кругова k_3', k_4'. Пошто се они додирују у тачки R', следи да су тачке O_3, R', O_4 колинеарне. Према томе, довољно је доказати да важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, јер ће тада то бити унакрсни углови и доказаћемо да су Q', R', S' колинеарне. Пошто су праве k_1', k_2' редом тангенте кругова k_4', k_3' у тачкама S', Q', следи да је $S'O_4 \perp k_1'$ и $Q'O_3 \perp k_2'$, а пошто су и паралелне, следи да важи $S'O_4 \parallel Q'O_3$. Према томе, углови $\measuredangle S'O_4R'$ и $\measuredangle Q'O_3R'$ јесу углови с паралелним крацима, па су подударни, тј. важи $\measuredangle S'O_4R' = \measuredangle Q'O_3R'$. Троуглови $\triangle O_4S'R', \triangle O_3Q'R'$ су једнакокраки и имају подударне углове при врху, па следи да имају подударне и остале углове. Специјално, важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, те су тачке Q', R', S' колинеарне.



Онда су P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Заиста, нека је p права која садржи тачке Q', R', S'. Инверзија је инволуција, па је $Q = \psi_k(Q')$, $R = \psi_k(R')$, $S = \psi_k(S')$. Ако $p \ni P$, онда је $\psi_k(p \setminus \{P\}) = p \setminus \{P\}$, па следи да $Q, R, S \in p$, што значи да су P, Q, R, S колинеарне. Ако $p \not\ni P$, онда је $\psi_k(p) = p' \setminus \{P\}$, где је p' круг који садржи тачку P и $Q, R, S \in p'$, што значи да су P, Q, R, S концикличне.